Tentamen i Mekanik 1 (FFM516)

Tid och plats: Onsdagen den 4 januari 2023 klockan 14.00-17.00 på Johanneberg.
Hjälpmedel: Inga
Examinator: Ulf Gran
Jour: Ulf Gran, tel. 031-772 3182, besöker tentamenssalarna c:a kl. 15.00 och 16.00.

Rättningsprinciper: Alla svar skall motiveras, införda storheter förklaras liksom val av metoder. Lösningarna förväntas vara välstrukturerade och begripligt presenterade. Erhållna svar ska, om möjligt, analyseras m.a.p. dimension och rimlighet. Skriv och rita tydligt! Varje uppgift bedöms med 0, 1, 2, . . ., 6 poäng enligt följande principer:

- För 6 poäng krävs en helt korrekt lösning.
- Mindre fel ger 1-2 poängs avdrag.
- Allvarliga fel (t ex dimensionsfel eller andra orimliga resultat) ger 4 poängs avdrag.
- Allvarliga principiella fel ger 0 poäng på uppgiften.
- Ofullständiga, men för övrigt korrekta, lösningar kan ge max 2 poäng. Detsamma gäller lösningsförslag vars presentation är omöjlig att följa.

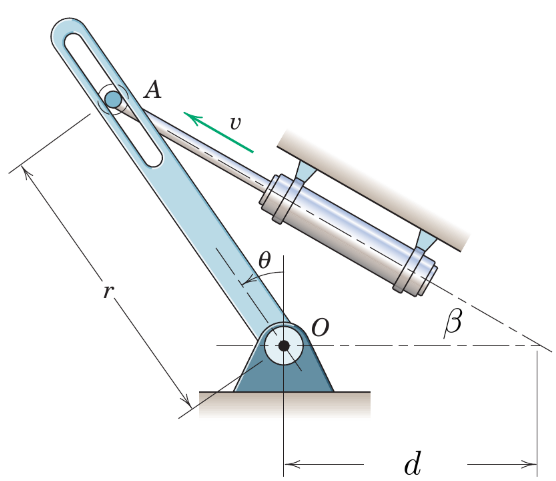
Betygsgränser: Varje uppgift ger maximalt 6 poäng, vilket innebär totalt maximalt 18 poäng på denna deltentamen. För att bli godkänd krävs minst åtta poäng och 8-11 poäng ger betyg 3, 12-15 poäng ger betyg 4 och 16-18 poäng ger betyg 5.

Rättningsgranskning: Fredagen 27 januari kl 12.30-13.00 i FL61.

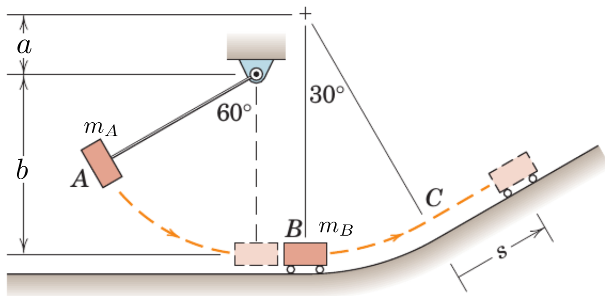
Uppgifter

OBS: I alla uppgifter får, om inget annat sägs, svaret ges i termer av de storheter som ges i uppgiftstexten och figuren samt tyngdaccelerationen g.

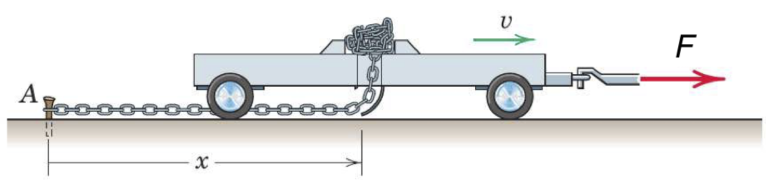
1. Den hydrauliska kolven ger punkten A en konstant fart v vilket får armaturen att rotera. Beräkna $\dot{r}$, $\ddot{r}$ och $\dot{\theta}$ som funktioner av θ.



2. Kroppen A med massan m_A släpps i vila i det avbildade läget med 60° utslagsvinkel, och träffar sedan vagnen B med massan m_B, som befinner sig i vila. Stöten är fullkomligt elastisk. Bestäm avståndet s från punkten C till den punkt där B vänder. Friktionen försummas.

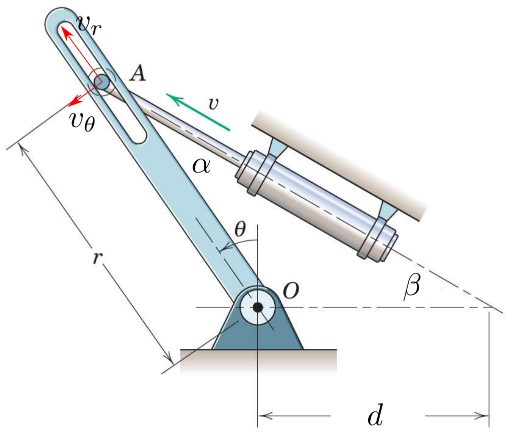


3. En vagn dras av en konstant kraft F. På vagnen ligger en kedja med massan ρ per längdenhet som passerar genom ett hål i vagnen och är fäst i marken. Vagnen och kedjan börjar med en fart v_0 i punkten $x = 0$ och har då totala massan m_0. Beräkna accelerationen för vagnen uttryck i F, m_0, ρ och x. Beräkna också spänningen T i kedjan på marken i termer av v och ρ, där v är vagnens hastighet vid position x. All friktion kan försummas.
Ledning: Antag att varje länk i kedjan rycks ner från vagnsflaket med en infinitesimal kraft och därefter initialt hamnar i fritt fall genom hålet.



Lycka till!

Uppgift 1



Figur 1.

Innan vi börjar med själva lösningen så

Hastighetsvektorn i polära koordinater ges av

$$\boldsymbol{v} = \dot{r}\boldsymbol{e}_r + r\dot{\theta}\boldsymbol{e}_\theta$$

Låt detta vara hastighetsvektorn för punkten A.

Det betyder att vi kan hitta $\dot{r}$ och $\dot{\theta}$ genom att projicera hastighetsvektorn i figuren i r- och θ-led. För att kunna lösa för $\dot{\theta}$ behöver vi veta r. Låt oss därför först hitta ett uttryck för r.

Inför vinkeln α som i figuren. Den ges av

$$\begin{aligned}\alpha &= \pi - \beta - \frac{\pi}{2} - \theta \\ &= \frac{\pi}{2} - \beta - \theta.\end{aligned}$$

Vi känner två vinklar och en sida av triangeln i uppställningen så vi kan lösa för alla sidor.

Sinussatsen kan användas för att lösa för r,

$$\begin{aligned}\frac{\sin(\alpha)}{d} &= \frac{\sin(\beta)}{r} \\ &\Leftrightarrow \\ r &= d\frac{\sin(\beta)}{\sin(\alpha)}.\end{aligned}$$

Nu kan vi projicera $\boldsymbol{v}$ i figuren på de vinkelräta vektorerna $\boldsymbol{e}_r$ och $\boldsymbol{e}_\theta$ och lösa för $\dot{r}$ och $\dot{\theta}$:

$$\boldsymbol{v} = v\cos(\alpha)\boldsymbol{e}_r + v\sin(\alpha)\boldsymbol{e}_\theta$$

$$\begin{aligned}\dot{r} &= v\cos(\alpha) \\ \dot{\theta} &= \frac{v}{r}\sin(\alpha) \\ &= \frac{v\sin(\alpha)}{d\frac{\sin(\beta)}{\sin(\alpha)}} \\ &= \frac{v}{d}\frac{\sin^2(\alpha)}{\sin(\beta)}\end{aligned}$$

För att hitta andraderivatorna av r och θ använder vi att eftersom stången ha konstant hastighet så är accelerationsvektorn för punkten A är en nollvektor. I polära koordinater ges den av

$$\boldsymbol{a} = \left(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2\right)\boldsymbol{e}_r + \left(r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta}\right)\boldsymbol{e}_\theta$$

Att accelerationsvektorn är en nollvektor betyder att båda komponenterna är noll. Det ger oss en möjlighet att direkt lösa för $\ddot{r}$ och $\ddot{\theta}$:

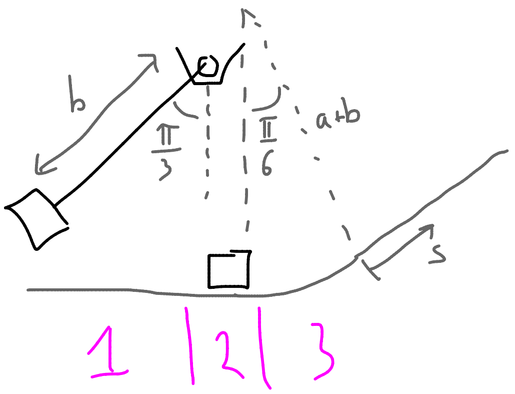
$$\begin{aligned}
a_\theta &= r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta} \\
&= 0 \\
&\Leftrightarrow \\
\ddot{\theta} &= -\frac{2\dot{r}\dot{\theta}}{r} \\
&= -2\frac{v^2}{d^2}\cos(\alpha)\frac{\sin^2(\alpha)}{\sin(\beta)}\frac{\sin(\alpha)}{\sin(\beta)} \\
&= -2\frac{v^2}{d^2}\frac{\cos(\alpha)\sin^3(\alpha)}{\sin^2(\beta)}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
a_r &= \ddot{r} - r\dot{\theta}^2 \\
&= 0 \\
&\Leftrightarrow \\
\ddot{r} &= r\dot{\theta}^2 \\
&= d\frac{\sin(\beta)}{\sin(\alpha)} \cdot \left(\frac{v}{d}\frac{\sin^2(\alpha)}{\sin(\beta)}\right)^2 \\
&= \frac{v^2}{d}\frac{\sin^3(\alpha)}{\sin(\beta)}
\end{aligned}$$

Vi kan nu slutligen substituera $\alpha = \frac{\pi}{2} - \beta - \theta$ vilket ger

$$\begin{aligned}
\dot{r} &= v\sin(\beta + \theta) \\
\ddot{r} &= \frac{v^2}{d}\frac{\cos^3(\beta + \theta)}{\sin(\beta)} \\
\ddot{\theta} &= -2\frac{v^2}{d^2}\frac{\sin(\beta + \theta)\cos^3(\beta + \theta)}{\sin^2(\beta)}
\end{aligned}$$

2



Bevarade storheter under förloppet:

(1) Energi

(stöt) 2) Energi o rörelsemängd

3) Energi

1 $$m_A g\left(b - b\cos\left(\tfrac{\pi}{3}\right)\right) = \frac{m_A v_A^2}{2}$$

2 $$\begin{cases} \dfrac{m_A v_A^2}{2} = \dfrac{m_A (v_A')^2}{2} + \dfrac{m_B (v_B')^2}{2} \\ m_A v_A = m_A v_A' + m_B v_B' \end{cases}$$

3 $$\frac{m_B (v_B')^2}{2} = m_B g\left(a+b - (a+b)\cos\left(\tfrac{\pi}{6}\right)\right) + m_B g\, s \cdot \sin\left(\tfrac{\pi}{6}\right)$$

$$(1) \Rightarrow v_A = \sqrt{2gb\left(1-\cos\tfrac{\pi}{3}\right)} = \sqrt{gb}$$

$$(2) \Rightarrow m_A v_A^2 = m_A\left(v_A - \frac{m_B}{m_A} v_B'\right)^2 + m_B (v_B')^2$$

$$\Leftrightarrow m_B (v_B')\left[\left(\frac{m_B}{m_A} + 1\right) v_B' - 2 v_A\right] = 0$$

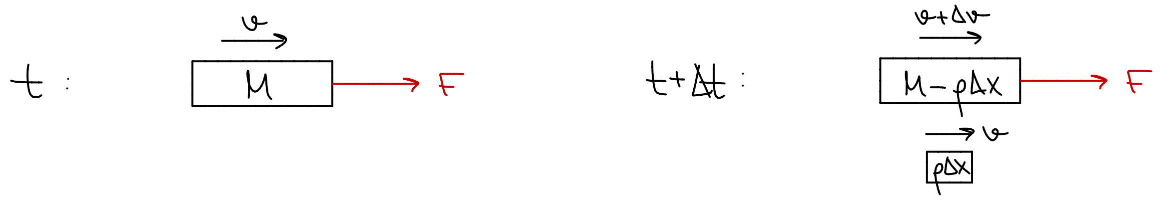
$$\Rightarrow v_B' = 2\frac{m_A}{m_A + m_B} v_A$$

$$(3) \Rightarrow s = \frac{(v_B')^2}{g} - (a+b)(2-\sqrt{3}) = \boxed{4\frac{m_A^2}{(m_A+m_B)^2} \cdot b - (a+b)(2-\sqrt{3})}$$

$[s] = m$ ok!

3 Massan för vagnen med påliggande kedja är $M = m_0 - \rho x$.

- Låt oss först betrakta vagnen med påliggande kedja vid tiden t och positionen x, under förloppet Δt då en liten bit Δx av kedjan, med massa $\rho \Delta x$, åker av vagnen och faller fritt (dvs innan den bromsas av kedjan på marken). Vi fokuserar på horisontella rörelser. Enligt uppgiften kan vi försumma kraften som rycker ner kedjebiten Δx.



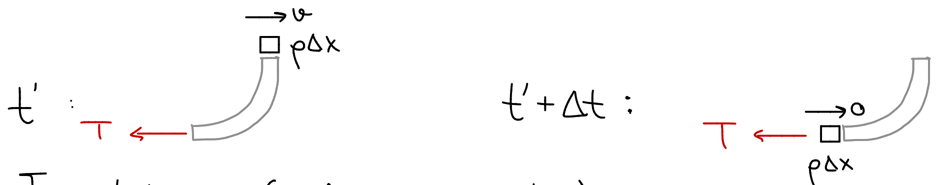
Impulslagen ger (när vi tar infinitesimaler och försummar $\Delta x \Delta v$)

$$P(t) = Mv \qquad P(t+\Delta t) = (M-\rho\Delta x)(v+\Delta v) + \rho \Delta x\, v = M(v+\Delta v)$$

$$F = \frac{\Delta P}{\Delta t} = \frac{M\Delta v}{\Delta t} = Ma$$

$$\Longrightarrow \quad a = \frac{F}{M} = \underline{\underline{\frac{F}{m_0 - \rho x}}} \qquad [a] = \frac{kg\, m/s^2}{kg} = m/s^2 \quad \text{OK!}$$

- För att få spännkraften T, låt oss istället betrakta förloppet då kedjebitarna bromsas in. Som förut försummar vi kraften som rycker ner nästa kedjebit från vagnen. Åter betraktas endast horisontell rörelse.



Impulslagen (med infinitesimaler):

$$T = -\frac{\Delta P'}{\Delta t} = -\frac{\rho\Delta x \cdot 0 - \rho \Delta x\, v}{\Delta t} = \underline{\underline{\rho v^2}} \qquad [T] = \frac{kg}{m}\left(\frac{m}{s}\right)^2 \quad \text{OK!}$$